


期权定价原理

永安期货研究院

周博


2013年5月



- 
-
- 期权定价模型的演化历程
 - 期权定价模型及原理
 - 影响期权定价的因素
 - 期权风险参数及其应用



■ 期权定价模型的演化历程

- 
-
- **B-S**模型之前的期权定价理论
 - **B-S**模型期权定价理论
 - **B-S**模型之后的期权定价理论

B-S模型之前的期权定价理论

(一) Bachelier (1900)

$$V_t = S_t \Phi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - K \Phi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \sigma\sqrt{\tau} \phi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

(二) Sprengle (1964)

$$V_t = kS_t \Phi(d_1) - k^*K \Phi(d_2) \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{kS_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{kS_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

(三) Boness (1964)

$$V_t = S_t \Phi(d_1) - e^{-\sigma\tau} K \Phi(d_2) \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{kS_t}{K}\right) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

(四) Samnelson (1965)

$$V_t = e^{(\alpha-\beta)\tau} S_t \Phi(d_1) - e^{-\beta\tau} K \Phi(d_2) \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

B-S模型期权定价理论

- **Black与Scholes（1973）** 提出，推导出了无红利支付股票的衍生证券所需满足的微分方程，并根据欧式期权所确定的边界条件，给出了股票欧式期权价值的解析表达式。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

$$V = S\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

B-S模型之后的期权定价理论

(一) 连续股利支付的B-S定价模型 (Merton (1973))

$$V_c = Se^{-q\tau}\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2) \quad d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

(二) 随机无风险利率的B-S定价模型 (Merton (1976))

$$V_c = S\Phi(d_1) - KB\Phi(d_2) \quad d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) - \ln(B) + \frac{1}{2}(\sigma^2 - \sigma_B^2 + 2\rho\sigma\sigma_B)\tau}{\sqrt{(\sigma^2 - \sigma_B^2 + 2\rho\sigma\sigma_B)\tau}} \quad d_2 = d_1 - \sqrt{(\sigma^2 - \sigma_B^2 + 2\rho\sigma\sigma_B)\tau}$$

(三) 带跳的B-S定价模型 (Cox和Ross (1975))

$$dS = \mu Sdt + dq \quad dq = \begin{cases} k-1 & \lambda Sdt \\ 0 & 1 - \lambda Sdt \end{cases}, \quad \mu \frac{\partial V}{\partial S} + \left(\frac{\mu - rS}{1-k}\right)V(S+k-1,t) + \left[\frac{r(S+k-1)}{1-k}\right]V(S,t) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

(四) 波动率修正的B-S定价模型 (Black和Cox (1976))


“波动率微笑”效应 $dS = \mu Sdt + \sigma(S,t)Sdz = \mu Sdt + \sigma^* S^\rho dz \quad 0 > \rho - 1 = \frac{\partial\sigma(S,t)/\partial S}{\sigma(S,t)/S}$

(五) CRR二项式定价模型 (Cox, Ross和Rubinstein (1979))

(六) 美式期权定价模型研究 (Barone-Adesi和Whaley (1987))



■ 期权定价模型及原理

- 
-
- **B-S**期权定价模型（欧式现货期权）
 - **Black（76）**期权定价模型（欧式期货期权）
 - 二叉树期权定价模型（欧式、美式、现货、期货）

B-S期权定价模型

- 假设：标的价格服从标的价格波动率和预期收益率为常数的几何布朗运动，即 $dS = \mu S dt + \sigma S dz$
- 原理：通过卖出一手看涨期权 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 买入 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 份股票，构造了一份无风险投资 $\pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S$ ，由**无套利原理**可知，该组合的收益率和无风险资产的收益率相同，即 $\Delta\pi = r\pi\Delta t$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf$$

$$C = S_0 N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

$$P = K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) - S_0 \cdot N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma\sqrt{T}}$$



- 场景：印度国家证券交易所（NSE）采取Black-Sholes模型为S&P CNX Nifty指数期权提供参考价。

- 优点：封闭解析解，计算速度快，精确。

- 缺点：适用范围有限，不能计算美式期权。


Black (76) 期权定价模型

- 介绍：由Fischer Black在1976年的《商品合约的定价》一文中首次详述。主要针对期货期权进行定价。
- 原理：通过建立无套利模型得出。

$$C = e^{-rT} [FN(d_1) - KN(d_2)];$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}};$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T};$$

- 
-
- 场景：商品期权、期货期权，并在债券期权、互换期权、股指期权上得到广泛应用。 **LME**是世界上最大的有色金属相关的期货、期权交易所，主要使用**Black-76**模型为期权定价。
 - 优点：封闭解析解，计算速度快。
 - 缺点：只能计算欧式，范围受限。

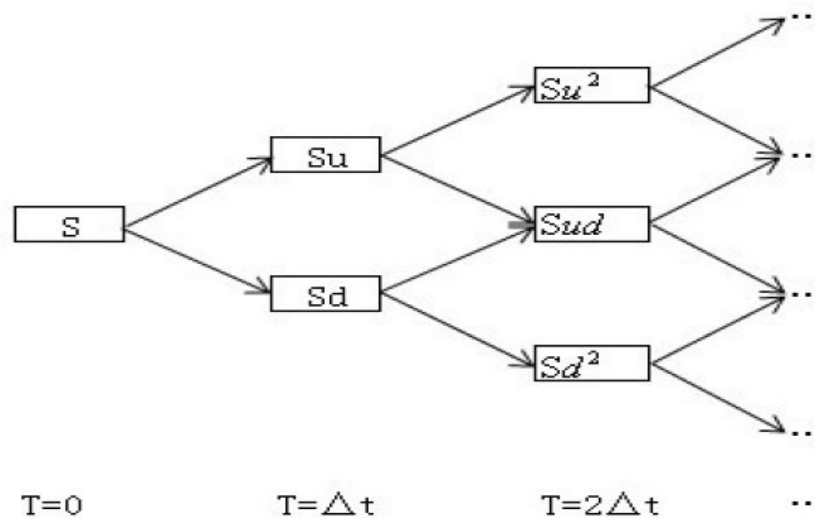
二叉树期权定价模型

- 介绍：由Cox, Ross和Rubinstein（1979）提出的，其初衷是为了以二叉树方法来提供B-S期权定价模型的一种简化推导方法。但其后的研究将其发展成为对美式期权和更为复杂的期权（如奇异期权）的基础定价方法。二叉树模型是典型的数值算法，既可用于欧式期权，也可用于美式期权。


- 原理：分支树法（Tree Approach）

- 欧式二叉树解析解收敛于BS解析解。

$$C = e^{-rT} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P^j (1-P)^{n-j} \max[0, u^j d^{n-j} S - K] \right]$$



- 美式期权在某个节点期权的价格是如下两个价格之中的较大者：一个是立即执行时的价格；另一个是继续持有时间的折现值。


- 
-
- 场景：大多交易所，做市商普遍采用的方法。韩国证券期货交易所（KRX）对于KOSPI 200期权，采取的是二叉树方法。
 - 优点：方法简单、易懂，具有扩展性。
 - 缺点：步长个数增加，模型收敛，但是计算耗时增大；步长个数减少，精度降低。



■影响期权定价的因素

保险与期权

Insurance Policy (保险)	Option (期权)
Price of Asset (资产价格)	Underlying Price (标的价格)
Deductible (起付线)	Strike Price (执行价格)
Time (时间)	Time (时间)
Interest Rates (利率)	Interest Rates (利率)
Level of Risk (风险级别)	Volatility (波动率)
= Premium (保金)	= Premium (权利金)

- 
-
- 标的价格与行权价格
 - 到期日
 - 无风险利率
 - 波动率

标的价格与行权价格

- 看涨期权权利金随执行价格增长而递减；看跌期权权利金随执行价格增加而递增；看涨期权权利金随标的价格增长而递增；看跌期权权利金随标的价格增加而递减。

图 1：执行价格对权利金的影响

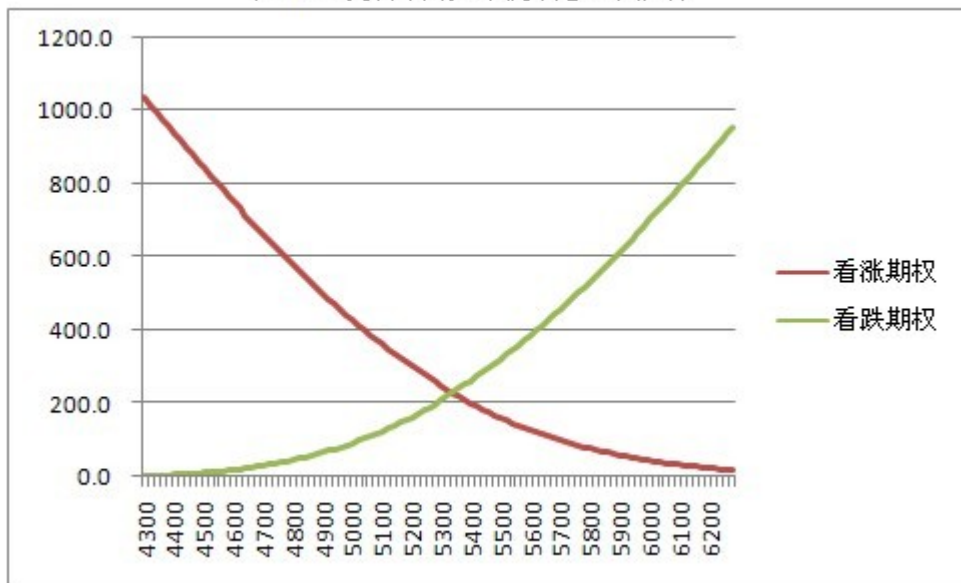
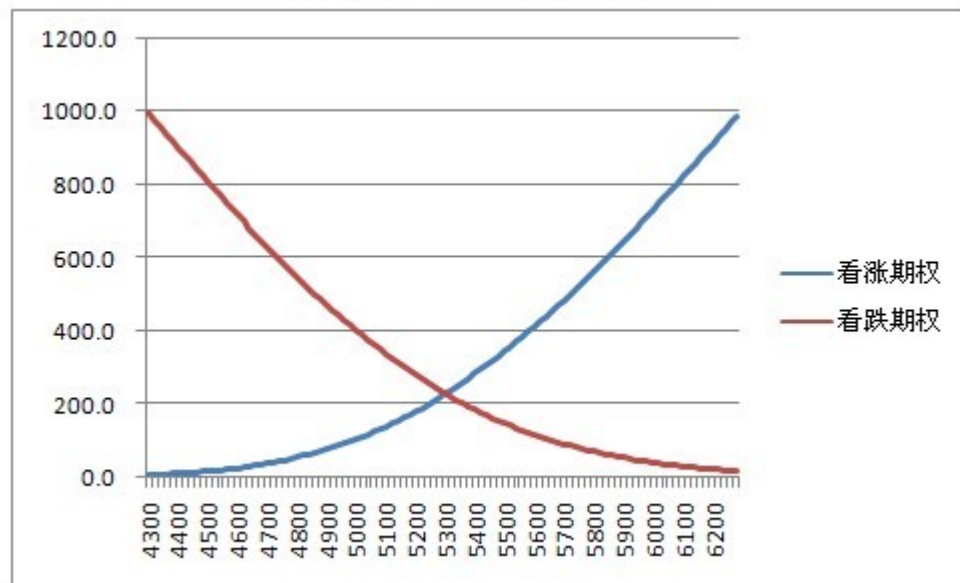
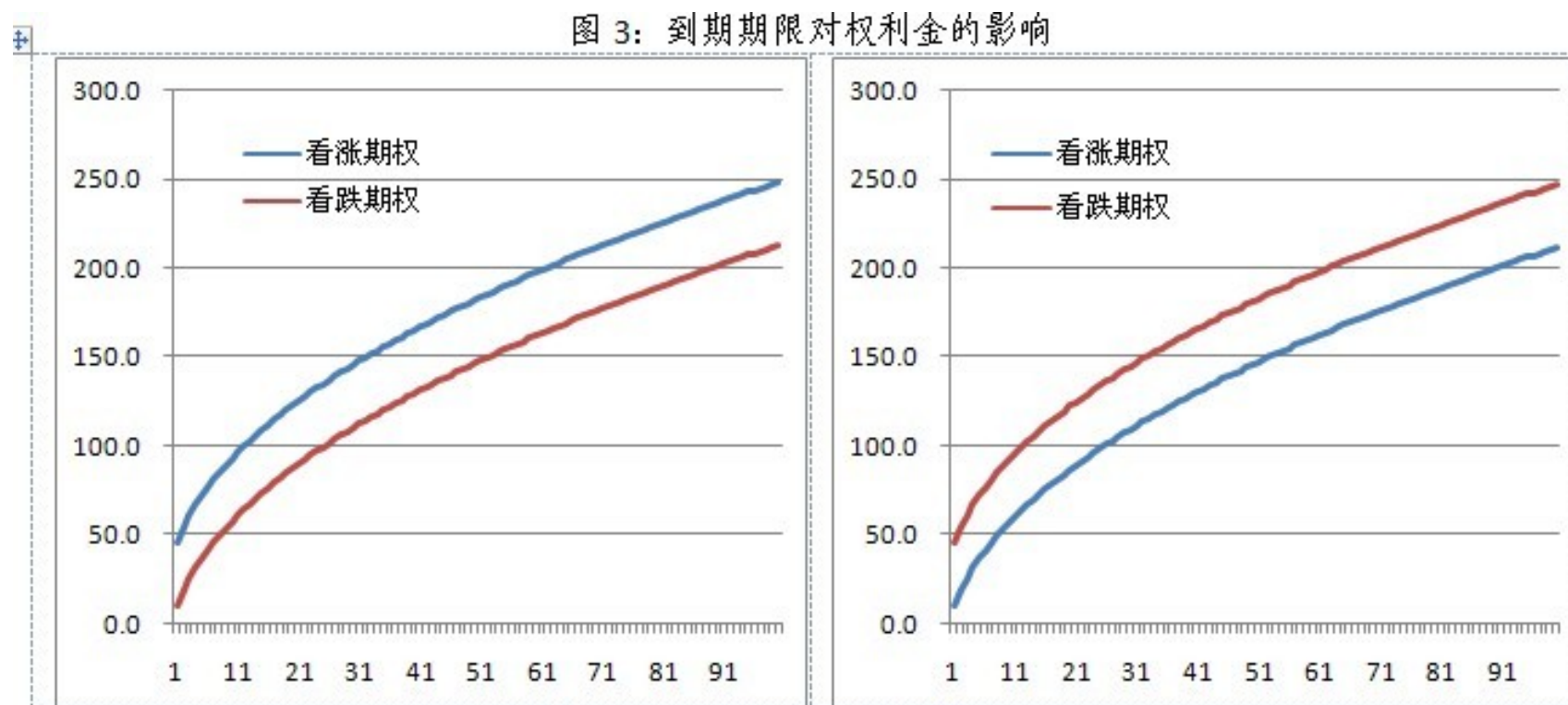


图 2：标的物价格对权利金的影响



到期日

- 到期期限超过一个月的时候，权利金随时间衰减速度呈现类线性特点；而在最后一个月，权利金速度呈现加速的特点。

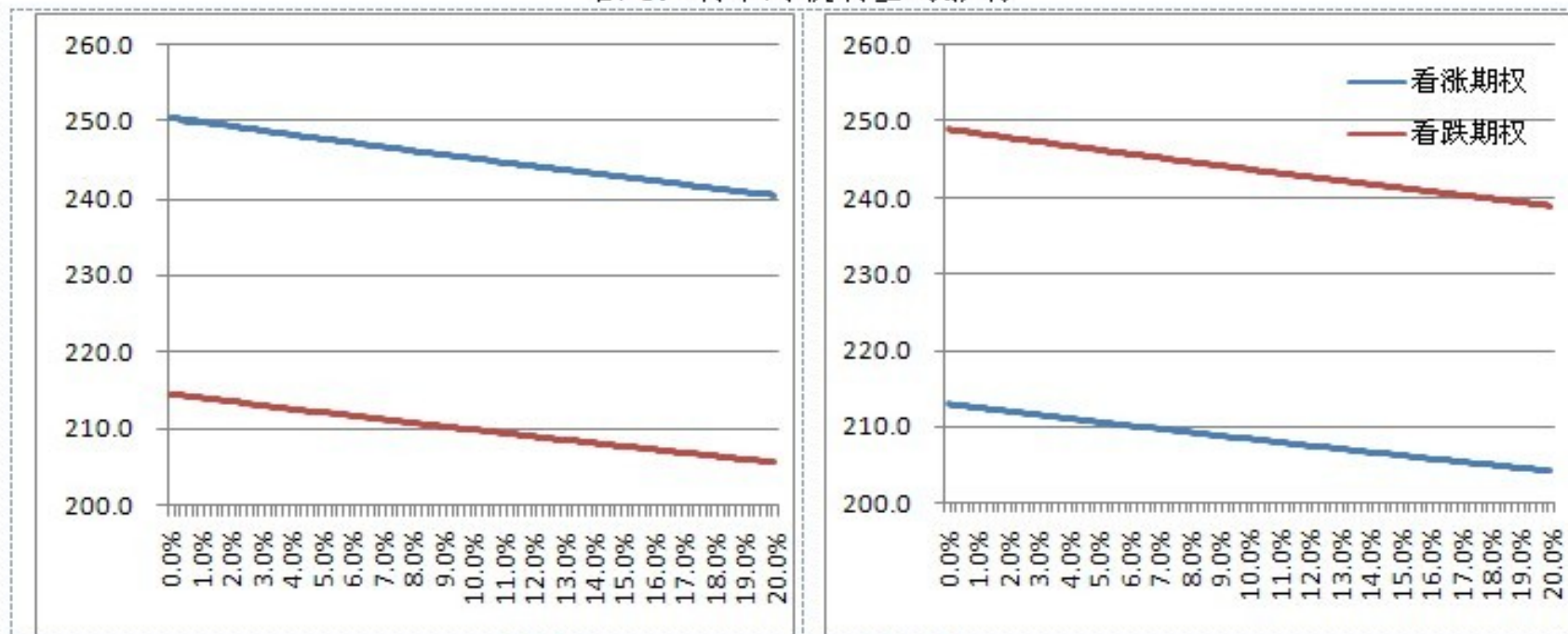


注：左图标的物价格 5336，右图标的物价格 5264。

无风险利率

- 利率对权利金的影响是最小的，这里的“最小”不仅指权利金变动最小，还包括利率本身相对其他变量的波动也是最小。期货期权看涨期权与看跌期权权利金随利率增加而减小。

图 6：利率对权利金的影响



注：左图标的物价格 5336，右图标的物价格 5264。

波动率

- 波动率的变化能够使权利金产生剧烈变化；看涨期权与看跌期权的权利金与波动率呈现较强的类线性相关关系；极端行情中，类似的线性关系不存在。

图 4：波动率（平值附近）对权利金的影响

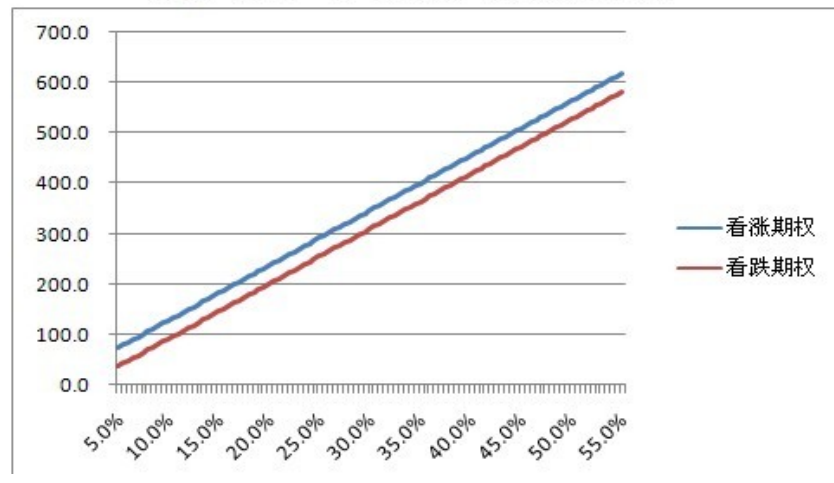
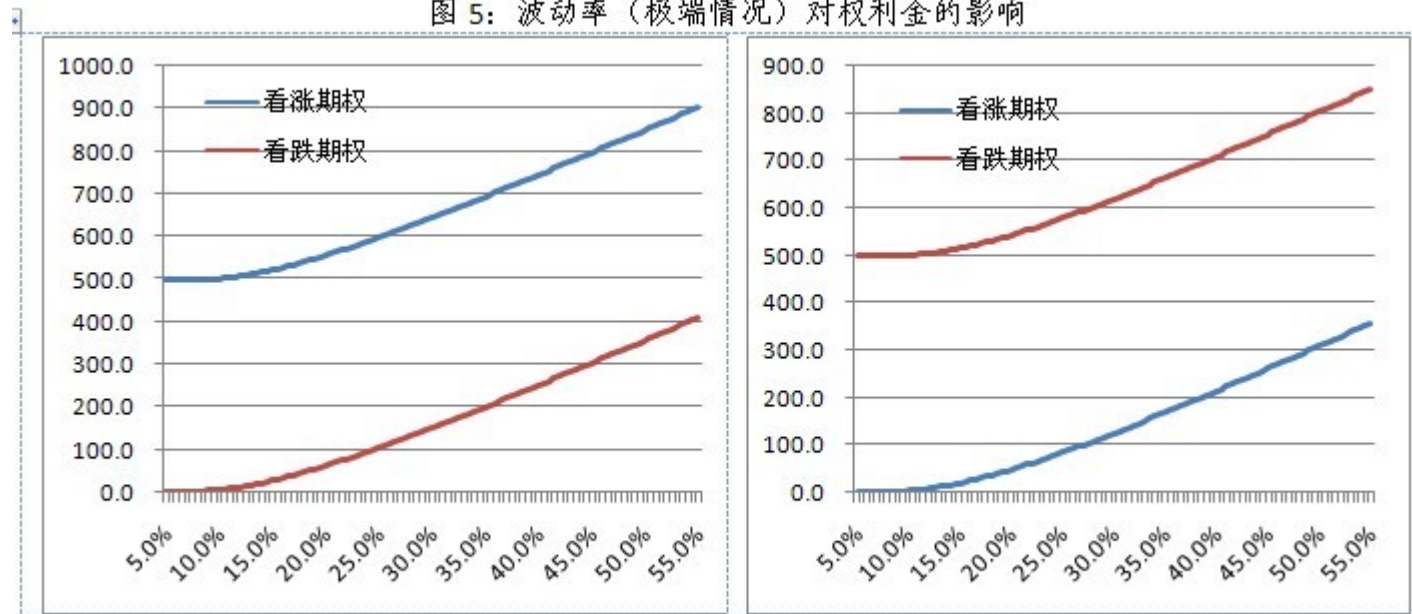


图 5：波动率（极端情况）对权利金的影响



注：左图标的物价格 5800，右图标的物价格 4800。



	中文解释	英文解释
实际波动率 (REALIZED VOL)	未来波动率, 未知数	Actual price movements between now and a date in the future. Also called “future volatility.” This is unknown.
历史波动率 (HISTORICAL VOL)	过去一段时间内的波动率	Actual price movements during a specific time period in the past.
预期波动率 (EXPECTED VOL)	运用统计推断方法对实际波动率预测结果	An estimate of future volatility.
隐含波动率 (IMPLIED VOL)	市场期权投资者的交易价格, 代入模型反推出来的波动率	The volatility percentage that justifies an option’s current market price.

- 实际上，隐含波动率很少和现实波动率相同（机会由此而来）；
- 投机者尝试从现实波动率和隐含波动率之间的预期差异中获利。

图 1: ICE 白糖 3 月合约隐含波动率与 90、120 天历史波动率对比




数据来源: ICE 网站

权利金与相关因素关系

	权利金		影响程度
	看涨期权	看跌期权	
执行价格	反向	正向	基数大，弱 基数小，强
标的价格	正向	反向	基数大，弱 基数小，强
到期期限	正向	正向	一个月内，强 一个月外，弱
波动率	正向	正向	强
无风险利率	反向	反向	弱



■ 期权风险参数及其应用

- 
-
- Delta
 - Gamma
 - Theta
 - Vega
 - Rho
 - 欧式期货期权与美式期货期权指标差异
 - 现货期权与期货期权指标差异

Delta

- **delta** (Δ)：度量当标的资产价格增加1元时，期权价格变化量。**delta**衡量的是期权价格变动与期权标的资产价格变动之间的关系，即期权价格与期权标的资产价格关系曲线的斜率。

图 1：美式二叉树期货期权 delta（标的价格变动）

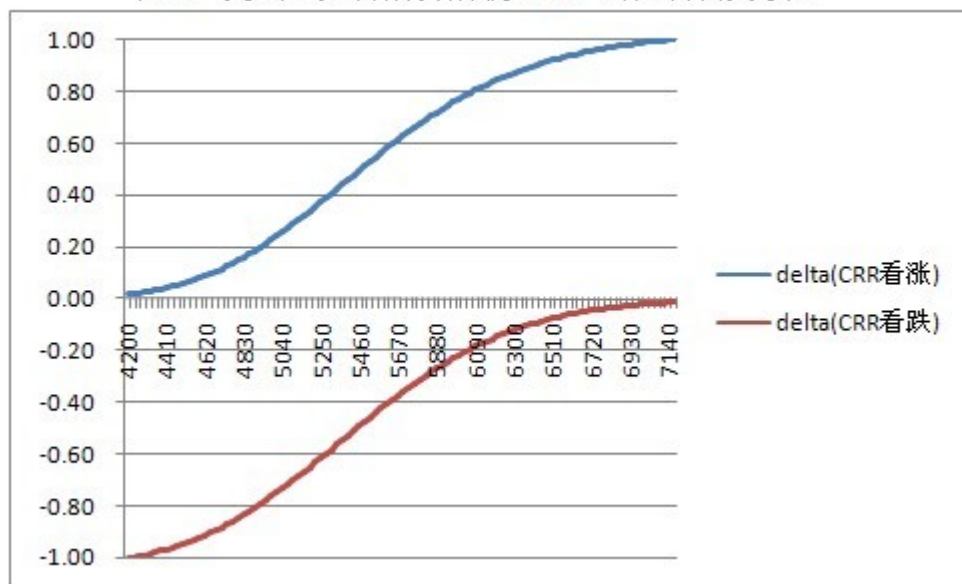
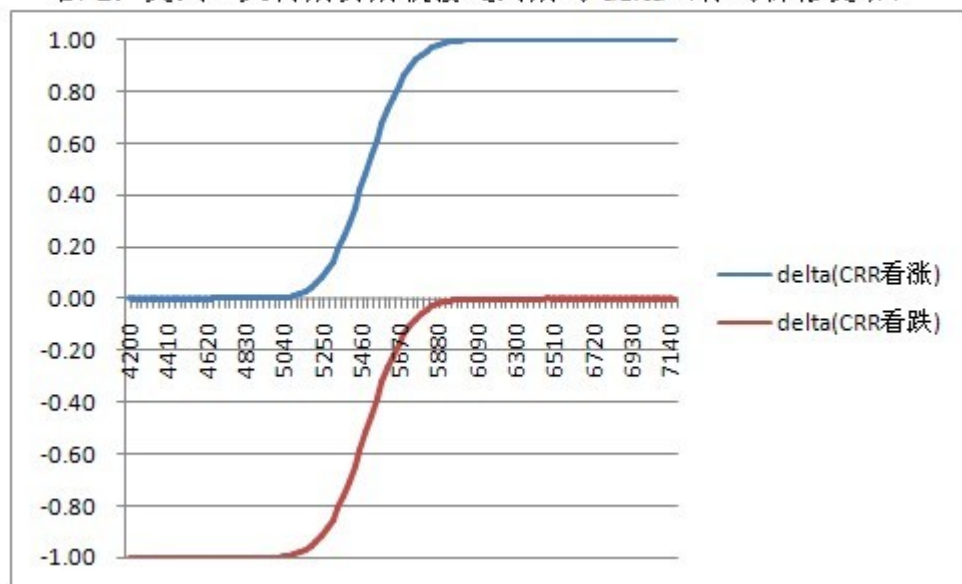


图 2：美式二叉树期货期权接近到期的 delta（标的价格变动）



- 性质一,对于看涨期权, $0 < \Delta < 1$; 对于看跌期权: $-1 < \Delta < 0$;
- 性质二: 在其他合约条件保持不变的情况下, 看涨期权和看跌期权的 Δ 值均随着标的资产价格的上升 (下降) 而增加 (减少);
- 性质三: 实值期权的 Δ 绝对值 $>$ 平值期权的 Δ 绝对值 $>$ 虚值期权的 Δ 绝对值, 而且, 实值期权的 Δ 绝对值大于 0.5 , 平值期权的 Δ 绝对值接近于 0.5 , 虚值期权的 Δ 绝对值小于 0.5 ;
- 性质四: 随着到期日的接近, 实值期权的 Δ 绝对值将收敛于 1 , 平值期权的 Δ 绝对值将收敛于 0.5 , 虚值期权的 Δ 绝对值将收敛于 0 。

Gamma

- **gamma (γ)**：度量当标的资产增加1元时，**delta**的变化量。**gamma**衡量的是期权标的资产价格的变化所引起的**delta**值的变化，即期权**delta**值变动相对于标的资产价格变动的比率。

图 3：美式二叉树期货期权 gamma (标的价格变动)

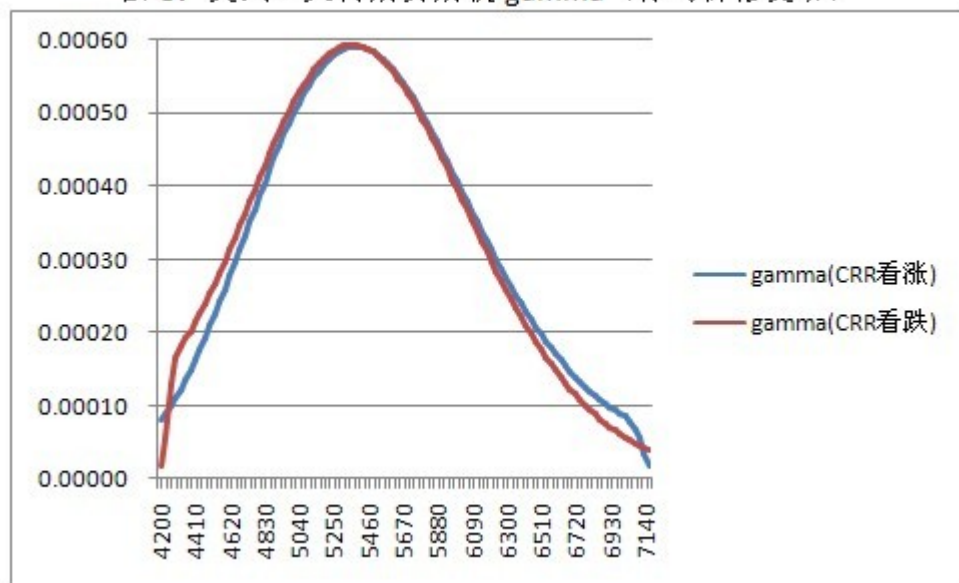
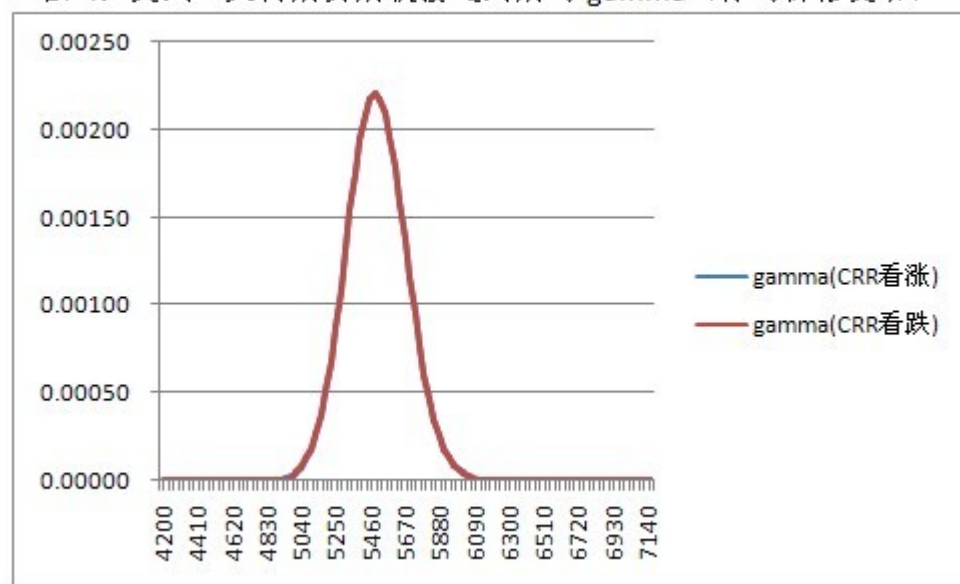


图 4：美式二叉树期货期权接近到期的 gamma (标的价格变动)



- 性质一：所有买入的期权gamma值均为正值；
- 性质二：对于合约条件相同的看涨期权与看跌期权，其二者平值附近的gamma值基本相同；
- 性质三：平值期权的gamma值大于实值期权或虚值期权；
- 性质四：深度实值期权与深度虚值期权的gamma值都接近于0，看涨和看跌期权gamma在深实值都有急速下降的加速过程；
- 性质五：平值期权的gamma值随着到期日的临近而加速增加。

Theta

- **theta (θ)**：度量当有效期减少1天时，期权价格的变化量。**theta**衡量的是期权价格因为时间经过而下降的速率，用于反映时间经过所带来的风险。

图 8：美式二叉树期货期权 theta（标的价格变动）

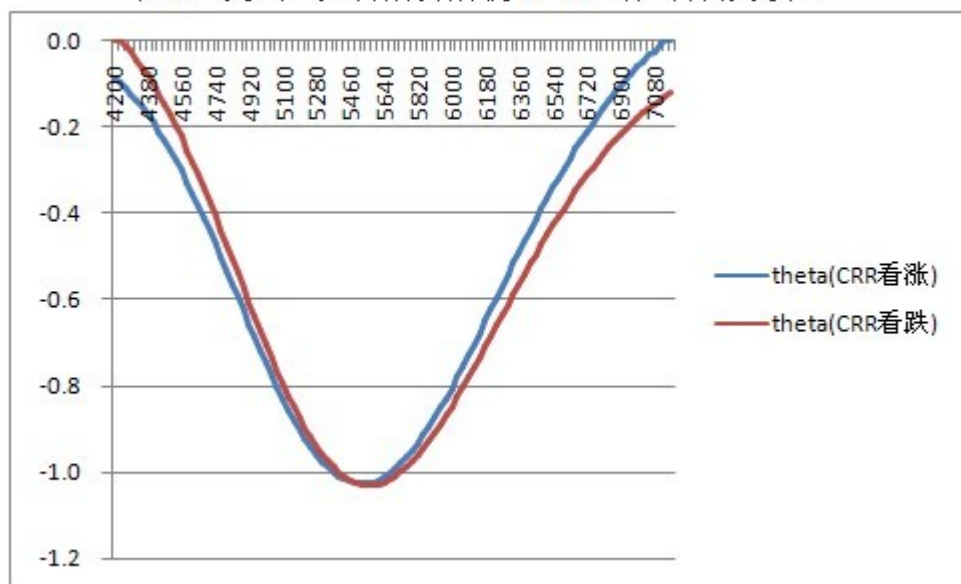
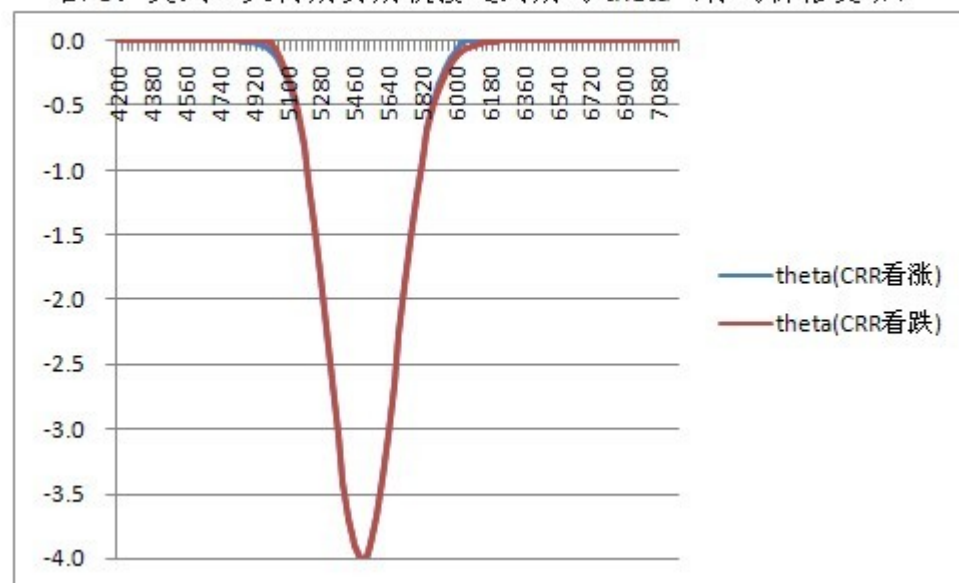



图 9：美式二叉树期货期权接近到期的 theta（标的价格变动）



- 
-
- 性质一：在一般情况下，看涨期权和看跌期权的theta值均小于0；
 - 性质二：平值期权的theta绝对值大于实值期权或虚值期权；
 - 性质三：对于合约条件相同的看涨期权与看跌期权，其二者平直附近的theta值相同；
 - 性质四：平值期权的价值随到期日的临近而不断加速衰减。

Vega

- **vega (v)**：度量当波动率有1个百分点的增长时，期权价格的变化量。**vega**衡量的是期权价格的变化与标的资产价格波动率变化之间的关系，用以反映标的资产价格波动率对期权价格的影响。

图 5：美式二叉树期货期权 vega (标的价格变动)

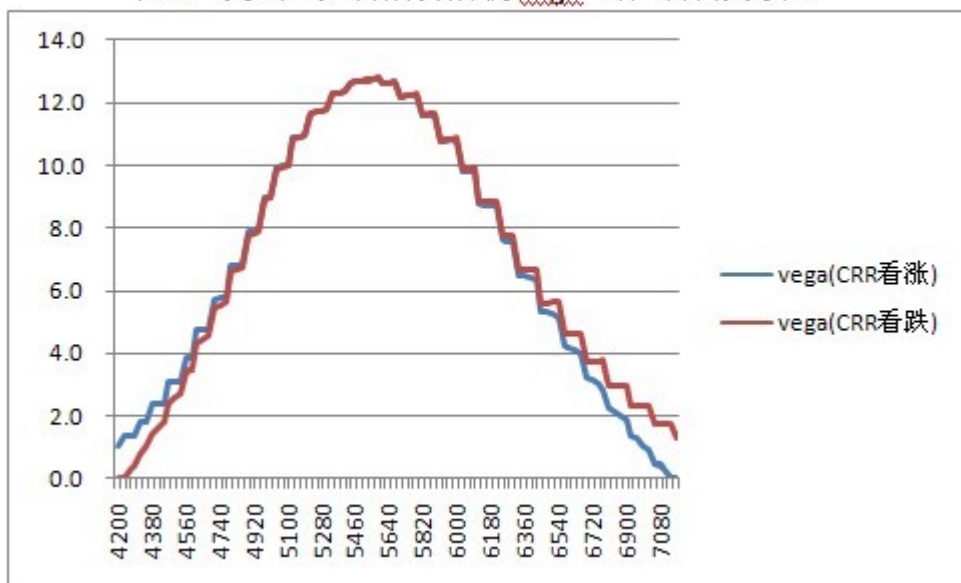
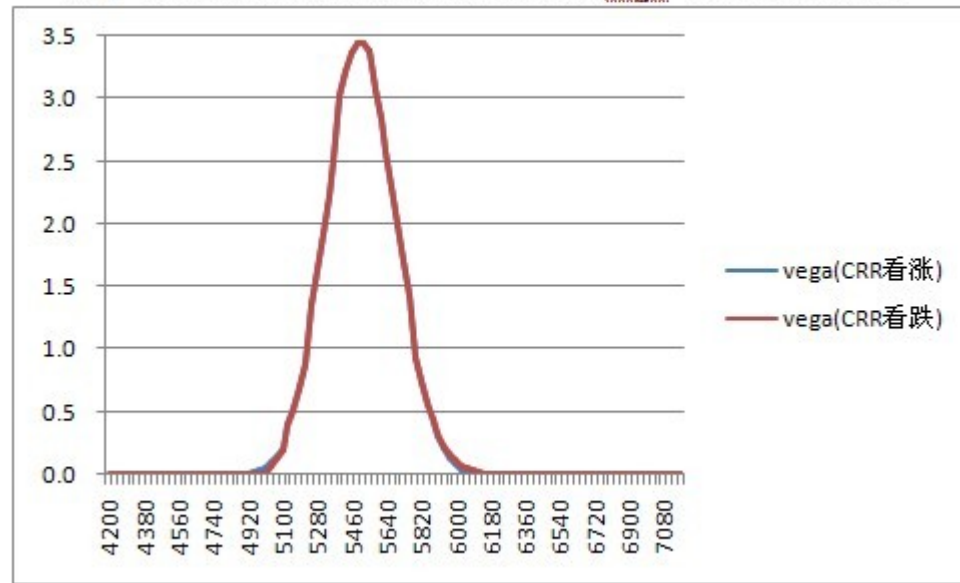


图 6：美式二叉树期货期权接近到期的 vega (标的价格变动)

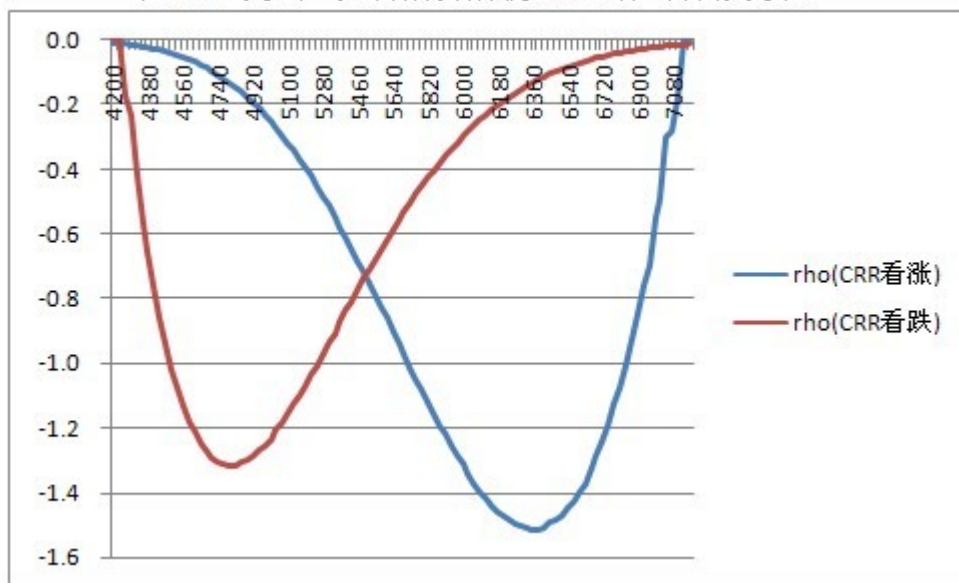



- 性质一：所有期权的vega值均大于0；
- 性质二：对于合约条件相同的看涨期权与看跌期权，其二者平直附近的vega值相同；
- 性质三：平值期权的vega值大于实值期权或虚值期权；
- 性质四：深度实值期权与深度虚值期权的vega值均接近于0；
- 性质五：期权的vega值随着到期日的临近而下降；
- 性质六：期权的vega值随着二叉树步长个数增加而更加平滑。

Rho

- **rho (ρ)** : 度量当市场无风险利率有1个百分点的增长时, 期权价格的变化量。**rho**衡量的是期权价格的变化与利率变化之间的关系, 用以反映期权价格对于利率变动的敏感程度。

图 10: 美式二叉树期货期权 rho (标的价格变动)



- 
-
- 性质一：看涨期权和看跌期权的rho值为负值；
 - 性质二：看涨期权和看跌期权深实值rho达到绝对值高位后，均有急速下跌的加速过程；
 - 性质三：利率变动对于短期期权的影响非常有限，rho值对于短期期权交易者的重要性低于其他风险度量指标。

欧式期货期权与美式期货期权指标差异

- 欧式期权深实值theta值可以为正值，而美式期权由于可以提前执行，无论期权实值部分有多深，theta也只能趋于零，不可能为正值。

图 14: 欧式 black 与美式 CRR 的 theta 对比 (标的价格变动)

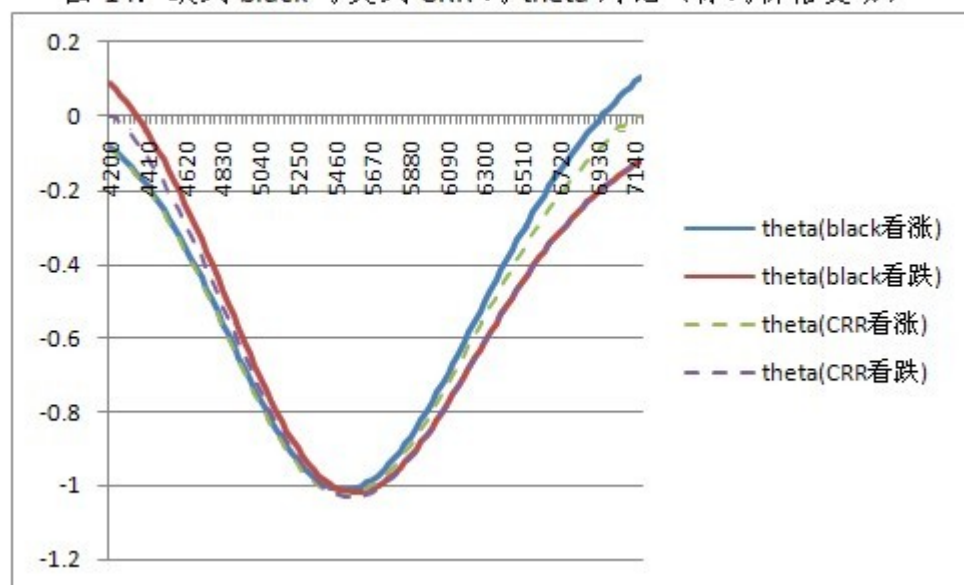
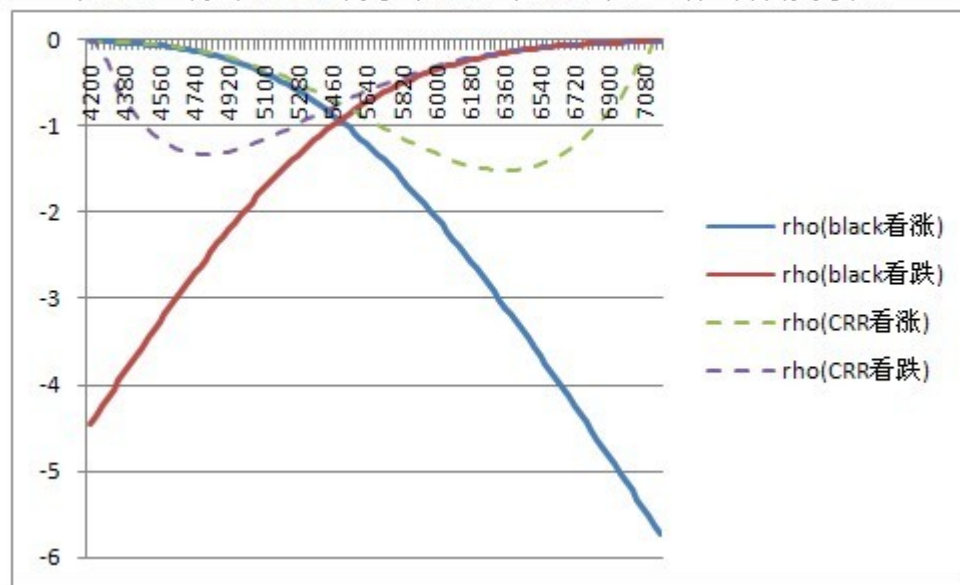


图 15: 欧式 black 与美式 CRR 的 rho 对比 (标的价格变动)



现货期权与期货期权指标差异

表 4: BS 现货期权风险指标解析式

指标	看涨期权	看跌期权
delta(Δ)	$N(d_1)$	$-N(-d_1) = N(d_1) - 1$
gamma(Γ)	$\frac{N'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}$	
vega(ν)	$S_t N'(d_1) \sqrt{T-t}$	
theta(θ)	$-\frac{S_t N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{S_t N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$
rho(ρ)	$K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$

表 5: black 期货期权风险指标解析式

指标	看涨期权	看跌期权
delta(Δ)	$e^{-r(T-t)}N(d_1)$	$-e^{-r(T-t)}N(-d_1) = e^{-r(T-t)}(N(d_1) - 1)$
gamma(Γ)	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_1)}{F_t \sigma \sqrt{T-t}}$	
vega(ν)	$F_t N'(d_1) \sqrt{T-t} e^{-r(T-t)}$	
theta(θ)	$-\frac{F_t e^{-r(T-t)}N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) + rF_t N(d_1) e^{-r(T-t)}$	$-\frac{F_t e^{-r(T-t)}N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) - rF_t N(-d_1) e^{-r(T-t)}$
rho(ρ)	$-(T-t)e^{-r(T-t)}(F_t N(d_1) - KN(d_2))$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}(KN(-d_2) - F_t N(-d_1))$

谢谢!